第 10卷 第 18期 2010年 6月
1671-1815(2010)18-4463-03
科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering
Vol.10 No.18 June 2010
© 2010 Sci.Tech.Engng.

Smarandache双阶乘函数及其混合均值

张 博
(陕西交通职业技术学院 基础部 西安 710018)

摘 要 利用初等方法和解析方法,研究了双阶乘函数 $Sdf^{k}(n)$ 的性质,获得了几个较强的均值性质及渐进公式。

关键词 Smarandache函数 复合函数 均值 渐近公式
中图法分类号 O156.4; 文献标志码 A

1 引言与结论

双阶乘函数 Smarandache双阶乘:

对于任意整数 m,它的 Smarandache双阶乘为

$$m!!=\begin{cases}1\cdot 3\cdot 5\cdots m, & \text{if } m \text{ is odd}\\ 2\cdot 4\cdot 6\cdots m, & \text{if } m \text{ is even}\end{cases},$$

例如:$3!!=1\times 3=3$, $6!!=2\times 4\times 6=48$.

双阶乘函数 $Sdf(n)$:对于 Smarandache双阶乘,我们定义函数:对任意的正整数 n,双阶乘函数 $Sdf(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $m!!$ 是 n 的一个倍数,即 $Sdf(n)=\min\{m: m!!=kn, m\in N, k\in N\}$。

对于 Smarandache双阶乘而言双阶乘函数 $Sdf(n)$ 的前几项值为:

$Sdf(1)=1$; $Sdf(2)=2$; $Sdf(3)=3$; $Sdf(4)=4$; $Sdf(5)=5$; $Sdf(6)=6$; $Sdf(7)=7$; $Sdf(8)=4$; $Sdf(9)=9$; $Sdf(10)=10$; $Sdf(11)=11$; $Sdf(12)=6$; $Sdf(13)=13$; $Sdf(14)=14$; $Sdf(15)=5$; $Sdf(16)=6$ …。

关于双阶乘函数 $Sdf(n)$,已有许多学者[3—6]对这个数列进行了研究:在文献[1]中,Kenichiro Kashihara介绍了这一函数,文献[3]研究了有关 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Sdf(n)}$、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Sdf(n)}{n}$ 敛散性,同时给出了 Diophantine方程 $Sdf(n)=Sdf(n+1)$ 解的讨论,特别是文献[2]、给出了一个较强的渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} Sdf(n)=\frac{x\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{x\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right)。$$

Kenichiro Kashihara建议我们研究 $S(n)$ 与 $Sdf(n)$ 之间的关系,本文通过初等方法和解析方法研究了双阶乘函数 K 次方及其它的复合的均值估计问题,并获得了几个较强的渐近公式,推广了文献[6]的结果。

定理 1 对任意的实数.对任意固定的正整数 $k(k\geqslant 2)$ 及 r 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(Sdf(n)-P(n))^{k}=\frac{\zeta(k+1)}{8(k+1)}\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{r}\frac{c_i x^{k+1}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^{r+1} x}\right)。$$

其中 $P(n)$ 是 n 的最大素因子,$c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数。

推论 当 $k=2$ 时

$$\sum_{n\leqslant x}(Sdf(n)-P(n))^{2}=\frac{\zeta(2)}{24}\frac{x^{3}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^{3}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{3}}{\ln^{k+1} x}\right)。$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann Zeta函数,$c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数。

定理 2 对任意的实数,对任意固定的正整数 $k(k\geqslant 2)$ 及 r 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(Sdf(n)-S(n))^{k}=\frac{\zeta(k+1)}{8(k+1)}\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{r}\frac{c_i x^{k+1}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^{k+1} x}\right)。$$

2010年 3月 31日收到 国家自然科学基金项目(10671155)
陕西省自然科学基金项目(SJ08A28)资助

第一作者简介:张 博(1963—),男,西安人,陕西交通职业技术学院基础部副教授,研究方向:基础数学。

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann Zeta函数，c_i ($i=2,3,\cdots,k$) 是可计算常数。

推论　当 $k=2$ 时

$$\sum_{n\leqslant x}(Sdf(n)-S(n))^2=\frac{\zeta(2)}{24}\frac{x^3}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^3}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)。$$

2 几个引理及其证明

引理 1　对于任何实数 $x\geqslant 1$，有渐近公式

设 $\pi(x)=\sum_{p\leqslant n}1$，由 Abel求和公式[7]及素数定理，$\pi(x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)$。

其中 $a_i=(i-1)!$，($i=1,2,3,\cdots,k$)。

引理 2的证明可参阅文献[2]中定理 4.2及文献[7]中定理 3.2。

引理 2　设 p 是素数，则有

$$\sum_{p\leqslant x}p^k=\frac{1}{k+1}x^{k+1}\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^{r+1}x}\right)。$$

证明　由 Abel求和公式[7]及引理 1，有

$$\sum_{p\leqslant x}p^k=\int_{\frac{2}{3}}^{x}t^k d\pi(t)=x^k\pi(x)-k\int_{\frac{2}{3}}^{x}t^{k-1}d\pi(t)dt=$$

$$x^k\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)\right)-$$

$$k\int_{\frac{2}{3}}^{x}t^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i t}{\ln^i t}+O\left(\frac{t}{\ln^{k+1}t}\right)\right)dt=$$

$$x^{k+1}\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i}{\ln^i x}-\frac{k}{k+1}x^{k+1}\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^{r+1}x}\right)=$$

$$\frac{1}{k+1}x^{k+1}\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^{r+1}x}\right)。$$

3 定理的证明

定理 1证明：

对于任意的 $n\geqslant 1$，$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准素因子分解式把区间 $(1,x]$ 的所有正整数 n 分成如下两个部分：

A：区间 $(1,x]$ 满足 $P(n)\geqslant\sqrt{n}$ 所有正整数 n，$i=1,2,\cdots,k$ 其中 $P(n)$ 是 n 的最大素因子。

B：表示区间 $(1,x]$ 中不属于集合 A 的正整数 n。那么：

$$\sum_{n\leqslant x}(Sdf(n)-P(n))^k=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}(Sdf(n)-P(n))^k+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}(Sdf(n)-P(n))^k。$$

若 $n\in A$，则 $n=mP(n)$，且 $P(m)<P(n)$，由 A 的定义知 $Sdf(2)=2$，对于任意正整数 $n>2$，且 $n\in A$，若 $2\mid n$，$Sdf(n)=2P(n)$，若 $2\nmid n$，$Sdf(n)=P(n)$，根据这个性质，有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}(Sdf(n)-P(n))^k=\sum_{\substack{2n\leqslant x\\ 2n\in A}}(Sdf(2n)-P(2n))^k+\sum_{\substack{2n-1\leqslant x\\ 2n-1\in A}}(Sdf(2n-1)-P(2n-1))^k=$$

$$\sum_{\substack{n\leqslant\frac{x}{2}\\ 2n\in A}}(Sdf(2n)-P(2n))^k=$$

$$\sum_{\substack{1<n\leqslant\frac{x}{2}\\ 2n\in A}}(2P(2n)-P(2n))^k=$$

$$\sum_{\substack{1<n\leqslant\frac{x}{2}\\ 2n\in A}}(P(2n))^k=$$

$$\sum_{\substack{np\leqslant\frac{x}{2}\\ p>2n}}p^k=\sum_{n\leqslant\sqrt{\frac{x}{2}}}\sum_{2n<p\leqslant\frac{x}{2n}}p^k \tag{10}$$

由引理 2有

$$\sum_{2n<p\leqslant\frac{x}{2n}}p^k=\int_{2n}^{\frac{x}{2n}}t^k d\pi(t)=\left(\frac{x}{2n}\right)^k\pi(x)-k\int_{2n}^{\frac{x}{2n}}t^{k-1}d\pi(t)dt=$$

$$\frac{x^{k+1}}{8(k+1)n^{k+1}}+\sum_{i=1}^{r}\frac{b_i x^{k+1}\ln^i n}{n^{k+1}\ln^i x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^{r+1}x}\right) \tag{11}$$

式(1)中用到估计式 $2n\leqslant\sqrt{x}$，b_i ($i=2,3,\cdots,k$) 是可计算常数。

注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}}=\zeta(k+1)$，根据式(10)，式(11)可得

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}(Sdf(n)-P(n))^k=\frac{\zeta(k+1)}{8(k+1)}\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{r}\frac{c_i x^{k+1}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^{k+1}x}\right) \tag{12}$$

式(12)中 $c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数。

对于任意的 $n\geq 1$ 且 $n\in B$，易见 $Sdf(n)\ll\sqrt{n}\ln n$ 和 $P(n)\ll\sqrt{n}$，故有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}(Sdf(n)-P(n))^k\ll\sum_{n\leqslant x}n^{\frac{k}{2}}\ln^k n\ll x^{\frac{k}{2}+1}\ln^k x \quad (13)$$

结合式(12)、式(13)，立刻有

$$\sum_{n\leqslant x}(Sdf(n)-P(n))^k=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}(Sdf(n)-P(n))^k+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}(Sdf(n)-P(n))^k=\frac{\zeta(k+1)}{8(k+1)}\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{r}\frac{c_i x^{k+1}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^{r+1}x}\right)$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann Zeta 函数。这就完成了定理的证明。

现在我们证明定理 2。

若 $n\in A$，$S(n)-P(n)=0$，若 $n\in B$，$|S(n)-P(n)|\leqslant\sqrt{n}$，根据文献[6]的结论与定理 2 的证明我们有

$$\sum_{n\leqslant x}(Sdf(n)-S(n))^k=\sum_{n\leqslant x}(Sdf(n)-P(n))^k+C_k^1\sum_{n\leqslant x}(P(n)-S(n))(Sdf(n)-P(n))^{k-1}+C_k^i\sum_{n\leqslant x}(P(n)-S(n))^i(Sdf(n)-P(n))^{k-i}+\cdots+\sum_{n\leqslant x}(P(n)-S(n))^k=\frac{\zeta(k+1)}{8(k+1)}\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{r}\frac{c_i x^{k+1}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^{r+1}x}\right)。$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann Zeta 函数。这就完成了定理 3 的证明。

参 考 文 献

1 Tom M A. Introduction to analytic number theory. New York: Springer-Verlag, 1976

2 沈 虹，一个新的数论函数及其它的值分布. 纯粹数学与应用数学，2007; 23(2): 235—238

3 贺艳峰. 两个数论函数的混合均值公式. 黑龙江大学自然科学学报，2008; 25(4): 477—479

4 陈国慧. Smarandache 问题新进展. Ann Arbor: High American Press, 2007

5 Zhu Minhui. On the mean value of the smarandache double factorial function. Scientia Magna, 2005; V1(1): 197—202

6 Xu Z F. On the value distribution of the Smarandache function. Acta Mathematics Sinica, Chinese Series, 2006; 49(5): 1009—1012

7 潘承洞，潘承彪. 解析数论基础. 北京：科学出版社，1999

Double Factorial Function and Its Hybrid Mean Value Asymptotic Formula

ZHANG Bo

(Department of Basis, Shaanxi College of Communication Technology, Xi'an 710018, P. R. China)

[Abstract] Using the elementary and analytic methods, the mean value properties of the Double factorial function $Sdf(n)$ is studied. Several sharper mean value formula of the function $Sdf(n)$ is given.

[Key words] Smarandache function mean value asymptotic formula